

文章编号: 1000-8055(2006) 02-0342-07

直升机弹性多支点传动轴的主共振分岔分析

许兆棠, 朱如鹏

(南京航空航天大学 机电学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 根据质心运动定理、Galerkin 法和 Dirac 函数, 求得非惯性移动系下直升机的倾斜弹性多支点传动轴的弯曲运动方程。在此基础上, 用多尺度法求得稳态下主共振的分岔方程。分析了运动稳定性、幅频响应曲线的拓扑结构等。结果表明: 弹性中间支点有限幅器的功用, 能提高传动轴的运动稳定性, 增大相邻阶主共振之间不分岔的频率范围。可通过减小偏心距、降低主共振的阶数、加大传动轴及中间支点处的阻尼, 使传动轴主共振不分岔。

关键词: 航空、航天推进系统; 直升机; 传动轴; 弹性多支点; 分岔; 稳定性; 拓扑结构

中图分类号: V 233. 1

文献标识码: A

Bifurcation Analysis of Main Resonance for a Helicopter Drive Shaft with Elastic Multi-Supports

XU Zhao-tang, ZHU Ru-peng

(College of Mechanical and Electrical Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A bending motion equation of a tilting helicopter drive shaft with elastic multi-supports was derived by the theorem of motion for center of mass, Galerkin method and Dirac function. A bifurcation equation of the steady state main resonance was obtained based on the multiple scales method. The motion stability, topology structure of amplitude-frequency response curves etc. were analyzed. The results show that elastic intermediate supports plays the role of the limiters, which can improve the motion stability and increase frequency range of non-bifurcation between adjacent orders of main resonance. The bifurcation of main resonance can be removed by reducing the eccentricity and the order of main resonance and increasing damping of the driving shaft and intermediate supports.

Key words: aerospace propulsion system; helicopter; elastic multi-supports; bifurcation; stability; topology structure

弹性多支点传动轴用于直升机上主减速器与中间减速器之间的传动。传动轴的工作转速在主共振区或通过主共振区时有可能产生主共振分

岔。主共振分岔时, 传动轴的振幅突变, 并受到冲击, 有可能运动失稳。

国内外多支点轴弯曲振动的研究主要针对轴

收稿日期: 2005- 04- 30; 修订日期: 2006- 01- 09

基金项目: 航空科学基金资助(03C52021); 江苏省自然科学基金资助(BK2004125)

作者简介: 许兆棠(1957-), 男, 江苏淮安人, 南京航空航天大学机电学院博士生, 主要从事直升机传动系统动力学研究。

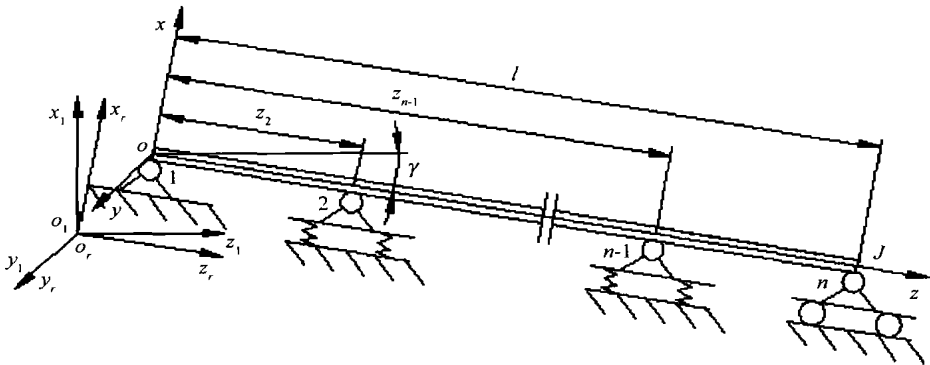


图1 一端固定铰支、一端游动铰支、中间弹性铰支的倾斜多支点传动轴

Fig. 1 The tilting drive shaft of elastic intermediate supports with two hinged tip supports

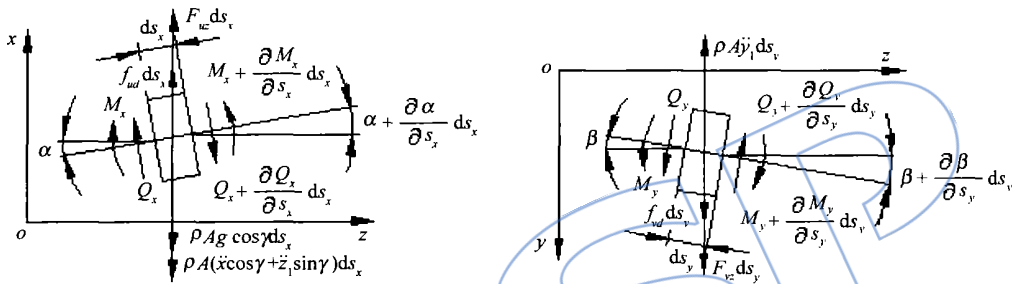


图2 微段受力分析

Fig. 2 The analysis of a forced laminate

系统在地面上、水平轴线性模型的多支点光轴、阶梯轴进行^[1~4],且报导很少。Kang^[1]等研究了弹性三支点光轴的弯曲振动。Tan^[2,3]等用波动法、传递函数法研究了多支点阶梯轴的弯曲振动。龚道荣、吴晓^[4]用奇异函数 Laplace 变换法研究了多个刚性支承转子系统横向固有频率和振型函数。这些研究,与多支点传动轴弯曲振动的研究联系密切,但将这些研究成果用于传动轴系统在空间运动的直升机的传动轴时,须做些研究工作。本文的特点是在非惯性系下研究传动轴系统在空间运动时传动轴弯曲主共振分岔。未见这方面报导。

传动轴是非线性弹性体。直升机飞行中,传动轴在非惯性系下工作;此外,直升机多种飞行姿态中,主减速器与中间减速器之间的水平传动轴与水平面之间有倾角。因此,在非惯性系及非线性系下研究倾斜弹性多支点传动轴的主共振分岔,更接近工作实际,并具有一般性。

首先根据质心运动定理、Galerkin 法和 Dirac 函数建立和求得非惯性系下直升机的倾斜弹性多支点传动轴的弯曲运动方程,然后用多尺度法求得稳态下主共振的分岔方程,再分析了运动稳定性、振幅突变性及定常解的幅频响应曲线的拓扑

结构等。

1 弯曲运动方程

直升机上水平传动轴是一根空心圆截面挠性轴。一端带有动联接花键,另一端带有挠性叠片联轴器,中间有多个滚动轴承与弹性橡胶套组合的支点,滚动轴承的内圈与传动轴直接相联,外圈通过弹性橡胶套与卡箍式轴承座联接,安装滚动轴承的梁有弹性,轴的端部作用传递的扭矩。当传动轴与水平面间有倾角时,可简化为非惯性系下一端固定铰支、一端游动铰支、中间弹性铰支的倾斜多支点传动轴,如图1。

在图1中建立惯性移动右手系 $O_1-x_1y_1z_1$, $O_v-x_1y_1z_1$ 及非惯性右手系 $O-xyz$, 原点 O 在左支点, z 轴过支点并与水平面成 γ 角, x, y 和 z 轴分别平行于 x_1, y_1, z_1 轴和 y_1 轴与 y_1 轴重合, z_1 轴与水平轴 z_1 成 γ 角。直升机飞行中,沿 x_1, y_1 和 z_1 轴方向的加速度分别为 $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$ 和 $\ddot{z}_1$ 则沿 x_1 和 y_1 轴方向的加速度分别为 $\ddot{x}_1 \cos \gamma + \ddot{z}_1 \sin \gamma$ 和 $\ddot{y}_1$ 。

传动轴工作中,轴线是一根空间挠曲线。取轴的长度为 l , 截面的面积为 A , 材料的轴向拉压弹

性模量为 E_a , 材料的密度为 ρ , 截面关于中性轴的惯性矩为 I , u 和 v 分别表示坐标为 z 的截面的几何中心在 t 时刻沿 x 、 y 轴的位移, u_e , v_e 和 e_z 分别表示坐标为 z 的截面的质心在 t 时刻沿 x 、 y 轴的相对几何中心的位移及偏心距。 m_{zj} 为第 j 个支点处随轴运动的质量, k_{zj} 为第 j 个支点处橡胶套等的刚度, 支点的坐标 $z_j, j = 1, 2, 3, \dots, n$, 坐标原点处, $j = 1, z_1 = 0$ 。在 Oxz 和 Oyz 面上, 取轴上距左端 z 处(对应于弧坐标 s_x, s_y) 的微段 $ds_x = dz / \cos \alpha$ 和 $ds_y = dz / \cos \beta$ 为分离体, 截面的面积近似为 A , 绘出与横向位移有关的力、力矩, 如图2。其中, Q_x 和 Q_y 是传动轴中剪力, M_x 和 M_y 是传动轴中

弯矩, f_{uz} 和 f_{vd} 分别是传动轴中单位长度沿 x 、 y 方向的阻尼力, f_{uzj} 和 f_{vzj} 分别是支点处沿 x 、 y 方向的阻尼力:

$$F_{uz} = \sum_{j=2}^{n-1} \left(f_{uzj} - m_{zj} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_{zj} u \right) \delta(z - z_j)$$

$$F_{vz} = \sum_{j=2}^{n-1} \left(f_{vzj} - m_{zj} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k_{zj} v \right) \delta(z - z_j)$$

δ 为 Dirac 函数。轴的工作转速 ω 。不计花键联接中摩擦力、微段摆动阻尼力矩的影响及支点处轴承质量的偏心, 弹性支点的反力不大于最大弹力。根据质心运动定理并用 Dirac 函数处理支点条件得^[5~7]:

$$\rho A \frac{\partial^2 (u + u_e)}{\partial t^2} = - \frac{\partial (Q_x \cos \alpha)}{\partial s_x} - \rho A (\ddot{x}_1 \cos \gamma + \ddot{z}_1 \sin \gamma) - \rho A g \cos \gamma + f_{ud} + F_{uz} \quad (1)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 (v + v_e)}{\partial t^2} = - \frac{\partial (Q_y \cos \beta)}{\partial s_y} - \rho A (\ddot{y}_1 + f_{vd} + F_{vz}) \quad (2)$$

根据传动轴中剪力与弯矩的准静力关系、材料力学中轴的弯矩与挠度关系,

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \quad u_e \approx e_z \cos \omega t$$

并考虑 F_{uz} 作用于支点处, 取最低阶截断误差为 $(\partial u / \partial z)^3$, 由式(1)得:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f_{ud} + E_a I \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \\ \rho A e_z \omega^2 \cos \omega t - \rho A (\ddot{x}_1 \cos \gamma + \ddot{z}_1 \sin \gamma) - \rho A g \cos \gamma + \\ \sum_{j=2}^{n-1} \left(f_{uzj} - m_{zj} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_{zj} u \right) \delta(z - z_j) \end{aligned} \quad (3)$$

用 $q_{ur}(t)$ 表示轴在 Oxz 面上运动规律的时间函数。根据两端铰支轴的横向运动形式及轴端的边界条件, 将沿 x 轴的横向运动表示为:

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} q_{ur}(t) \sin \frac{r\pi z}{l} \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

将偏心距表示为:

$$e_z = \sum_{r=1}^{\infty} e_{zr} \sin \frac{r\pi z}{l}$$

e_{zr} 为第 r 阶偏心距^[8]。轴的内阻尼有不同的模型^[8~10], 考虑轴的变形小、直径小且是空心薄壁件, 及线性模型能近似反映内阻尼变化并便于动力分析和计算, 取阻尼力:

$$f_{ud} = - (C_{wd} + C_{wa}) \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$f_{uzj} = - C_{wzj} \frac{\partial u}{\partial t}$$

C_{wd} , C_{wa} 分别是传动轴的结构阻尼系数和外阻尼系数, C_{wzj} 是第 j 个支点处橡胶套的结构阻尼系

数。将公式(4)代入公式(3), 实施 Galerkin 计算, 利用固有振型的正交性得^[7]:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{ur} + 2\zeta_{ur} \omega_{ur} \dot{q}_{ur} + \omega_{ur}^2 q_{ur} - \\ \frac{7\omega_{ur}^2 m_{EI}}{8} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 q_{ur}^3 = \frac{\rho A}{m_{lr}} e_{zr} \omega^2 \cos \omega t - \\ \frac{2\rho A (1 - \cos r\pi)}{r\pi m_{lr}} \cdot \\ (\ddot{x}_1 \cos \gamma + \ddot{z}_1 \sin \gamma + g \cos \gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

再用 $q_{vr}(t)$ 表示轴在 Oyz 面上运动规律的时间函数, 由公式(2)同理可得:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{vr} + 2\zeta_{vr} \omega_{vr} \dot{q}_{vr} + \omega_{vr}^2 q_{vr} - \\ \frac{7\omega_{vr}^2 m_{EI}}{8} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 q_{vr}^3 = \frac{\rho A}{m_{lr}} e_{zr} \omega^2 \sin \omega t - \\ \frac{2\rho A \gamma_1 (1 - \cos r\pi)}{r\pi m_{lr}} \end{aligned} \quad (6)$$

令:

$$q_{Br}(t) = q_{ur}(t) + i q_{vr}(t)$$

i 为虚单位, 由公式(5)、(6)得:

$$\ddot{q}_{Br}(t) + 2\zeta_{wr}\omega_{wr}\dot{q}_{Br}(t) + \omega_{wr}^2 q_{Br}(t) - \frac{7\omega_{wr}^2 m_{EI}}{32} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 [3\ddot{q}_{Br}(t) \bar{q}_{Br}(t) + \ddot{\bar{q}}_{Br}(t)] =$$

$$\frac{\rho A}{m_{lr}} e_{zr} \omega_{wr}^2 \exp(i\omega t) - \frac{2\rho A(1 - \cos r\pi)}{r\pi m_{lr}} \exp(i\delta) \frac{(x_{10} \cos \gamma_0 + z_{10} \sin \gamma_0 + g \cos \gamma_0)^2 + y_{10}^2}{(x_{10} \cos \gamma_0 + z_{10} \sin \gamma_0 + g \cos \gamma_0)^2 + y_{10}^2} \quad (7)$$

公式(7)即是计入几何非线性效应及阻尼的非惯性移动系下倾斜弹性多支点传动轴的弯曲运动方程,描述了一个激振力的振幅中含有激振频率的 Duffing 受迫振动系统。式中, $\bar{q}_{Br}(t)$ 为 $q_{Br}(t)$ 的共轭,第 r 阶固有频率 $\omega_{wr} = (k_{Er} + k_{uwr})/m_{lr}$, 第 r 阶阻尼比:

$$\zeta_{wr} = \frac{C_{wrd} + C_{wra} + C_{zr}}{2\omega_{wr} m_{lr}}$$

$$m_{zr} = \sum_{j=2}^{n-1} m_{zj} s_{zrj}, \quad C_{zr} = \sum_{j=2}^{n-1} C_{uwzj} s_{zrj}$$

$$k_{uwr} = \sum_{j=2}^{n-1} k_{zj} s_{zrj}, \quad m_{lr} = \rho A + m_{zr}$$

$$m_{EI} = \frac{k_{Er}}{k_{Er} + k_{uwr}}, \quad k_{Er} = EI \left(\frac{r\pi}{l} \right)^4$$

$$\ddot{q}_{Br} + \omega_{wr}^2 q_{Br} = \epsilon \left[-\frac{2\zeta_{wr}\omega_{wr}}{\epsilon} \dot{q}_{Br} + \omega_{wr}^2 (3\ddot{q}_{Br}\bar{q}_{Br} + \ddot{\bar{q}}_{Br}) + \frac{\rho A e_{zr} \omega_{wr}^2 \exp(i\omega t)}{\epsilon m_{lr}} \right] -$$

$$\frac{2\rho A(1 - \cos r\pi)}{r\pi m_{lr}} \exp(i\delta) \frac{(x_{10} \cos \gamma_0 + z_{10} \sin \gamma_0 + g \cos \gamma_0)^2 + y_{10}^2}{(x_{10} \cos \gamma_0 + z_{10} \sin \gamma_0 + g \cos \gamma_0)^2 + y_{10}^2} \quad (8)$$

设 $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon$, D_1 为偏导数算子 $\frac{\partial}{\partial T_1}$ 。又设 $x_{10} = x_{10}$, $y_{10} = y_{10}$, $z_{10} = z_{10}$, $\gamma_0 = \gamma_0$, $\delta_0 = \delta_0$, 均为常数。

$$q_{Br}(t) = q_{Br0}(T_0, T_1) + \epsilon q_{Br1}(T_0, T_1) \quad (9)$$

$$q_{Br0}(t) = a_{wr}(T_1) \exp[i\omega_{wr} T_0 + i\beta_{wr}(T_1)] + B_{wr0} \quad (10)$$

$$B_{wr0} = -\frac{2\rho A(1 - \cos r\pi) \exp(i\delta_0)}{r\pi m_{lr} \omega_{wr}^2}.$$

$$(x_{10} \cos \gamma_0 + z_{10} \sin \gamma_0 + g \cos \gamma_0)^2 + y_{10}^2 = B_{wr0} \exp(i\delta_0) \quad (11)$$

取 $\omega^2 = \omega_{wr}^2 + 2\epsilon\omega_{wr} + (\epsilon\omega)^2 \approx \omega_{wr}^2 + 2\epsilon\omega_{wr}$, 引入 $\Phi_{wr} = \sigma T_1 - \beta_{wr}(T_1)$, $f_{wr} = \frac{\rho A e_{zr}}{\epsilon m_{lr}} (\omega_{wr}^2 + 2\epsilon\omega_{wr})$, 根据公式(8), 由消除永年项的条件得:

$$D_1 a_{wr} = -\frac{\zeta_{wr}\omega_{wr}}{\epsilon} a_{wr} + \frac{f_{wr}}{2\omega_{wr}} \sin \Phi_{wr} \quad (12)$$

$$a_{wr} D_1 \Phi_{wr} = a_{wr} \sigma + \frac{3\omega_{wr}}{2} (a_{wr}^3 + 2a_{wr} B_{wr0}^2) + \frac{f_{wr}}{2\omega_{wr}} \cos \Phi_{wr} \quad (13)$$

令 $D_1 a_{wr} = 0$, $D_1 \Phi_{wr} = 0$, 稳态运动定常解的振幅分别为 $\bar{a}_{wr}$ 和 Φ_{wr} 相位, 由公式(12)、(13) 得得主共振的分岔方程(14), 也得定常解的幅频响应关系。

$$\left\{ (\zeta_{wr}\omega_{wr})^2 + \left[\omega_{wr}^2 - \omega_{wr} + \frac{3\epsilon\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr0}^2) \right] \right\} \bar{a}_{wr}^2 = \left[\frac{\rho A e_{zr} (\omega_{wr}^2 + 2\epsilon\omega_{wr})}{2m_{lr}\omega_{wr}} \right]^2 \quad (14)$$

3 主共振的分岔分析

3.1 运动稳定性

公式(14)是关于 ω_{wr} 的实系数二次代数方程, 可解出一对实根:

2 主共振的分岔方程

用多尺度法研究公式(7)的第 r 阶主共振的分岔。令 $\omega = \omega_{wr} + \epsilon\omega$, ϵ 为小参数, $0 \leq \epsilon \ll 1$, $\sigma = O(1)$ 为调谐参数。公式(7)中, $0 < m_{EI} < 1$, 含有 $3\ddot{q}_{Br}\bar{q}_{Br} + \ddot{\bar{q}}_{Br}$ 项是由于轴的横截面摆转产生的, 是小量, 在前面加入小参数; 考虑惯性力的频率远小于主共振频率, 最后一项前不设小参数, 有^[5]:

$$s_{zrj} = \frac{2}{l} \left[\sin \frac{r\pi z_j}{l} \right]^2$$

$$\delta = \arctan \frac{y_{10}}{x_{10} \cos \gamma_0 + z_{10} \sin \gamma_0 + g \cos \gamma_0}$$

$$\omega_p = \omega_{wr} - \frac{3\epsilon\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr}^2) \pm \sqrt{\left[\frac{\rho A e_{xr} (\omega_{wr}^2 + 2\epsilon\omega_{wr})}{2m_{lr}\omega_{wr}\bar{a}_{wr}} \right]^2 - (\zeta_{wr}\omega_{wr})^2} \quad (15)$$

根据公式(15),当给出一个 $\bar{a}_{wr}$ 时,得到两个 ω_p 的值,计算较小的 ω_p 值时,取“±”中的“-”号,对应分岔曲线的左支解曲线;计算较大的 ω_p 值时取“±”中的“+”号,对应分岔曲线的右支解曲线。

取 $l = 3\ 600\ \text{mm}$, $e_{xr} = 0.42\ \text{mm}$, $z_2 = 900\ \text{mm}$, $z_3 = 1\ 800\ \text{mm}$, $z_4 = 2\ 700\ \text{mm}$, $m_{z2} = m_{z3} = m_{z4} = 0.774\ \text{kg}$, $k_{z2} = k_{z3} = k_{z4} = 90\ 000\ \text{N/m}$, $C_{uz2} = C_{uz3} = C_{uz4} = 220\ \text{N} \cdot \text{s/m}$, $C_{uvd} + C_{uva} = 70\ \text{N} \cdot \text{s/m}$, $E_a = 7\ 000\ \text{MPa}$, $\rho = 2\ 710\ \text{kg/m}^3$, 轴的內径 $d = 95\ \text{mm}$, 轴的外径 $D = 110\ \text{mm}$, $|B_{uv3d}| = 0.222\ \text{mm}$, $\epsilon = 2.6915 \times 10^{-5}$, $r = 3$, 计算得第3阶弯曲固有频率 $\omega_{w3} = 1\ 237.4\ \text{rad/s}$, 第3阶阻尼比 $\zeta_{w3} = 0.009\ 604\ 5$, 绘出图3稳态主共振的分岔曲线,第3阶定常解的最大振幅 $20.819\ 6\ \text{mm}$, 第3阶定常解的最大振幅时 $\frac{\omega_p}{\omega_{w3}} = 0.982\ 5$ 。图中,横坐标为频率比 $\frac{\omega_p}{\omega_{w3}} = \left[\frac{\omega_p}{\omega_{wr}} - 0.97 \right] \times 100$, 纵坐标为定常解的振幅, k_m 点幅值最大, 曲线 $k_m k_c$ 为右支

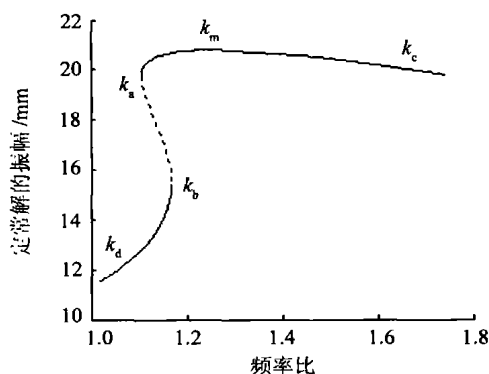


图3 稳态主共振的分岔曲线

Fig. 3 The bifurcation curve of main resonance of steady-state

解曲线,其它为左支解曲线。曲线 $k_a k_m k_c$ 为上支解曲线,曲线 $k_a k_b$ 为中间支解曲线(虚线),曲线 $k_a k_b$ 为下支解曲线。

将方程(12)、(13)在 $(\bar{a}_{wr}, \Phi_{wr})$ 处线性化,形成关于扰动量 Δa_{wr} 和 $\Delta \Phi_{wr}$ 的自治微分方程:

$$D_1 \Delta a_{wr} = - \frac{\zeta_{wr}\omega_{wr}}{\epsilon} \Delta a_{wr} + \frac{f_{wr}}{2\omega_{wr}} \cos \Phi_{wr} \Delta \Phi_{wr} \quad (16)$$

$$D_1 \Delta \Phi_{wr} = \frac{1}{\bar{a}_{wr}} \left[\sigma + \frac{3\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr}^2) \right] \Delta a_{wr} - \frac{f_{wr}}{2\omega_{wr}\bar{a}_{wr}} \sin \Phi_{wr} \Delta \Phi_{wr} \quad (17)$$

根据公式(16)、(17)的特征方程,由Routh-Hurwitz判据可得分岔解的失稳的条件:

$$\Gamma = \left[\frac{\zeta_{wr}\omega_{wr}}{\epsilon} \right]^2 + \left[\sigma + \frac{3\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr}^2) \right] \left[\sigma + \frac{3\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr}^2) \right] < 0 \quad (18)$$

将公式(14)对 $\bar{a}_{wr}^2$ 求导数,及根据公式(15)得:

$$\Gamma = \left[\frac{\zeta_{wr}\omega_{wr}}{\epsilon} \right]^2 + \left[\sigma + \frac{3\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr}^2) \right] \left[\sigma + \frac{3\omega_{wr}}{2} (\bar{a}_{wr}^2 + 2B_{wr}^2) \right] = \pm \frac{2\bar{a}_{wr}^2}{\epsilon^2} \sqrt{\left[\frac{\rho A e_{xr} (\omega_{wr}^2 + 2\epsilon\omega_{wr})}{2m_{lr}\omega_{wr}\bar{a}_{wr}} \right]^2 - (\zeta_{wr}\omega_{wr})^2} \frac{d\omega_p}{d\bar{a}_{wr}^2} \quad (19)$$

求导后,公式(15)中“±”变号。 $d\omega_p/d\bar{a}_{wr}^2$ 与 $d\omega_p/d\bar{a}_{wr}$ 同号。对于右支解曲线,取公式(19)“±”中“-”号,根据图3, $d\omega_p/d\bar{a}_{wr} < 0$, 则有 $\Gamma > 0$, 分岔解稳定。对于左支解曲线,取公式(19)“±”中“+”号,根据图3, 上支解曲线及下支解曲线的 $d\omega_p/d\bar{a}_{wr} > 0$, 则有 $\Gamma > 0$, 分岔解稳定;中间支解曲线的 $d\omega_p/d\bar{a}_{wr} < 0$, 则有 $\Gamma < 0$, 分岔解不稳定。

由公式(18)可知,加大阻尼,可破坏分岔解的失稳的条件,使传动轴运动稳定。阻尼越大,越不易满足分岔解的失稳的条件,运动稳定性越好。纤维增强的复合材料传动轴比钢、铝合金传动轴内

阻尼大,运动稳定性好,不易发生失稳及分岔。

支点处的结构阻尼使阻尼比增大,支点处的刚度使弯曲固有频率增大,因此,弹性中间支点有提高传动轴的运动稳定性及增大相邻阶主共振之间不产生分岔的频率范围的功用。

3.2 振幅突变性

在 k_a 和 k_b 切点,存在平行于纵轴的切线。当轴的工作转速增大时,振幅由下支解曲线,经 k_b 点跳到上支解曲线,振幅变化速度由 $d\bar{a}_{wr}/d\omega_p = \infty$ 到有限值,出现自激振动的振幅突变的跳跃现象。当轴的工作转速减小时,振幅由上支解曲线,

经 k_a 点跳到下支解曲线, 同样出现振幅突变的跳跃现象。以上现象是传动轴的双尖点突变。这引起支承及机身的抖动, 支承的轴承受到冲击, 是传动轴的设计中应避免的现象。当传动轴的工作中存在双尖点突变时, 在传动轴及支承的轴承的强度计算中, 应考虑双尖点突变引起的动载荷。由于传动轴及支点有弹性及阻尼, 这种振幅突变存在一定柔性。

由图3可知, 当 k_a 与 k_b 点不重合时, 振幅突变一定存在。当 k_a 与 k_b 点重合时, 重合点是拐点, 拐点附近有较大幅值变化率。

在支点处, 轴的横向位移量及振幅突变量受到支座的限制, 支点有限幅器的功用, 当支点的位置在振幅大的位置时, 可较好地限制轴的振幅突变量。

3.3 分岔曲线的拓扑结构

由图3可知, 随 ω_p 增大。在 k_a 和 k_b 点出现分岔。主共振时, 是否出现 $k_a k_b$ 曲线, 与分岔曲线的拓扑结构有关。令:

$$\beta_a = - \frac{3\omega_{vr}}{2\epsilon^2} \left[\frac{\rho A e_{zr} (\omega_{vr}^2 + 2\epsilon\omega_{vr})}{2m_{lr}\omega_{vr}} \right]^2$$

$$\mu_a = \frac{\zeta_{vr}\omega_{vr}}{\epsilon}, \quad a_a^2 = \frac{3\omega_{vr}}{2} \bar{a}_{vr}^2$$

$$b_a = 3\omega_{vr} B_{vr}^2$$

公式(14)变为^[8]:

$$H = [\mu_a^2 + (\sigma + a_a^2 + b_a)^2] a_a^2 + \beta_a \quad (20)$$

这是余维数为2的分岔方程。 σ 为分岔参数, μ_a 和 β_a 为开折参数。根据奇异性理论, 分岔点集:

$$B_0 = \{(\mu_a, \beta_a) \in R^2, \mu_a = 0, \beta_a = 0\}$$

双极限点集 D_0 为空集, 滞后点集:

$$H_0 = \left\{ (\mu_a, \beta_a) \in R^2, \mu_a = - \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_a^{1/3}, \beta_a \leq 0 \right\}$$

转迁集 $\sum_0 = B_0 \cup H_0 \cup D_0$ 。对于传动轴来说, $\mu_a \geq 0, \beta_a \leq 0$, 开折参数平面上只存在滞后点集。根据 μ_a 与 ζ_{vr} , β_a 与 e_{zr} 的关系, 滞后点集为:

$$H_0 = \left\{ (\zeta_{vr}, e_{zr}) \in R^2, \right.$$

$$\left. \zeta_{vr} = \frac{3^{5/6}}{4} \left[\frac{\rho A e_{zr}}{2m_{lr}\omega_{vr}^2} \overline{\epsilon} (\omega_{vr}^2 + 2\epsilon\omega_{vr}) \right]^{2/3} \right\}$$

并可以得到 $\zeta_{vr} e_{zr}$ 平面上传动轴主共振的转迁集和定常解的幅频响应曲线(如图4)及 $\zeta_{vr1} e_{zr}$ 平面上传动轴不同阶主共振的转迁集(如图5)。

图4中, 转迁集将开折平面分成两个区域, 每个区域的定常解的幅频响应曲线有相同的拓扑结

构。在①区域, 幅频响应曲线的拓扑结构与图3相同, 存在主共振的分岔及不稳定的幅频响应解曲线(虚线)和冲击。在②区域, 不存在主共振的分岔及不稳定的幅频响应解曲线和冲击。在转迁集上, 幅频响应曲线的不稳定解曲线变为一个拐点。转迁集是主共振分岔与不分岔的分界线。

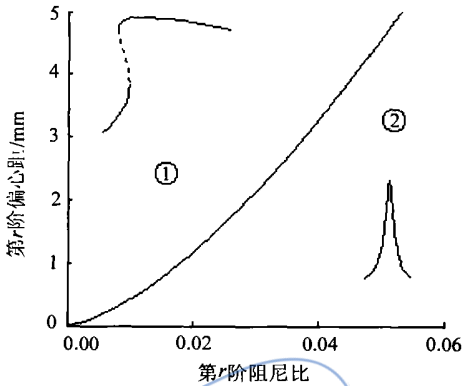


图4 传动轴主共振的转迁集和幅频响应曲线

Fig.4 The transition boundary and amplitude-frequency curves of main resonance of a shaft

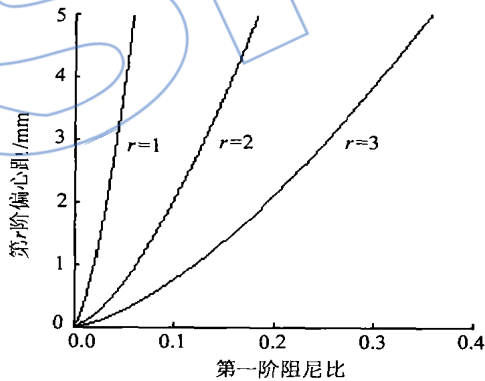


图5 传动轴不同阶主共振的转迁集

Fig.5 The transition boundary of main resonance of different orders of a shaft

为保证传动轴运动稳定及不产生冲击, 主共振时, 希望不存在分岔, 即要求传动轴在②区域工作。由图4可知, 当第 r 阶阻尼比一定时, 第 r 阶偏心距小, 有利于实现传动轴在②区域工作。轴的偏心距小, 第 r 阶偏心距小。因此, 为了使传动轴无主共振分岔, 在制造及安装中, 要设法减小质量偏心; 使用前, 对其动平衡。目前, 用动平衡减小质量偏心的难度较大, 应主要考虑在制造及安装中减小质量偏心。当偏心距一定时, 加大第 r 阶阻尼比, 也即加大阻尼, 可使传动轴在②区域工作。由 ζ_{vr} 可知, 增大传动轴中及中间支点处的结构阻

尼,均可增大第 r 阶阻尼比。弯曲主共振的振幅越大,阻尼的作用越明显。在挠度大的轴段上增大阻尼,如附加薄橡胶套,及支点在挠度大的轴段上,能较好地发挥传动轴中及支点处的结构阻尼限制主共振分岔的作用。直升机要求传动轴的重量轻,且高于一般行走机械对传动轴重量的要求。在挠度大的轴段上增大阻尼,有利于优化轴的重量。钢、铝合金传动轴中结构阻尼很小,吸收振动能量的能力很小,是一根避免主共振分岔能力低的传动轴,难以避免高阶振动时主共振的分岔,应对其材料和结构改进。复合材料传动轴比钢、铝合金传动轴中结构阻尼大,有利于使传动轴主共振不分岔。中间支点处的结构阻尼来自于弹性橡胶套,为使传动轴主共振不分岔,设计中,应选用较大结构阻尼的橡胶。

$$\text{由转迁集得: } \zeta_{gr} = \frac{3^{5/6}}{4} \left[\frac{\rho A e_{zr}}{m_{lr}} \overline{\epsilon} \right]^{2/3}$$

$$\text{令: } \zeta_{gr} = \frac{\zeta_{gr1}}{k_{\omega nr}^2}$$

$$\text{则有: } \zeta_{gr1} = \frac{3^{5/6}}{4} \left[\frac{\rho A e_{zr} k_{\omega nr}^3}{m_{lr}} \overline{\epsilon} \right]^{2/3}$$

ζ_{gr1} 为第一阶阻尼比。再结合图5可知①、②区域的大小与主共振阶数有关,转迁集与定常惯性力无关;当主共振的阶数一定时,①、②区域的大小与工作转速几乎无关。由图5可知,主共振的阶数低,①区域小,②区域大。②区域大,传动轴主共振不分岔的区域大。因此,降低传动轴最大主共振的阶数,有利于实现传动轴主共振不分岔。为避免传动轴主共振分岔,选择传动轴的工作转速时,应优先考虑传动轴的工作转速低于第一阶弯曲固有频率,其次是在第一、二阶弯曲固有频率之间。由图5可知,偏心距一定时,第一阶转迁集上相应的第 r 阶阻尼比较小,易实现传动轴主共振不分岔。

通过对传动轴系统的主动控制实现传动轴主共振不分岔时,要增加控制系统及其重量,在轴上增加控制器件困难,使其难以实现。根据以上分析,在传动轴系统的设计中,可以通过减小偏心距、降低主共振的阶数、增大传动轴中及支点处的结构阻尼等使传动轴主共振不分岔,此方法简单易行,应优先选用。

4 结 论

(1) 当轴的工作转速为第 r 阶主共振频率时,有可能发生第 r 阶主共振分岔。当第 r 阶弯曲固有频率小于轴的工作转速时,轴的工作转速通

过第 r 阶弯曲固有频率时,有可能发生第 r 阶主共振分岔。

(2) 主共振分岔时,轴的振幅有突变,分岔曲线的上、下支解曲线稳定,中间支解曲线不稳定。

(3) 转迁集是主共振分岔与不分岔的分界线。减小质量偏心,降低传动轴最大主共振的阶数,有利于实现传动轴主共振不分岔;加大传动轴中及中间支点处的结构阻尼,可实现传动轴主共振不分岔。主共振分岔与定常惯性力有关,转迁集与定常惯性力无关。

(4) 弹性中间支点有提高传动轴的运动稳定性、增大相邻阶主共振之间不产生分岔的频率范围及限幅器的功用。

(5) 纤维增强的复合材料传动轴比钢、铝合金传动轴运动稳定性好,易实现主共振不分岔。

参考文献:

- [1] Kuang B, Tan C A. Transverse Mode Localization in a Dual-Span Rotating Shaft [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 219(1): 133~155.
- [2] Tan C A, Kuang W. Vibration of a Rotating Discontinuous Shaft by the Distributed Transfer Function Method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 183(3): 451~474.
- [3] Tan C A, Kuang B. Wave Reflection and Transmission on an axially Strained, Rotating Timoshenko Shaft [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(3): 483~510.
- [4] 龚道荣, 吴晓. 用奇异函数研究多支承转子系统固有横振 [J]. 四川工业学院学报, 1997, (6): 77~80.
Gong Daoong, Wu Xiao. A Study on the Natural Transverse Vibration of Multi-Supported Rotor System by Using Singular Function [J]. *Journal of Sichuan Institute of Technology*, 1997, (6): 77~80.
- [5] 胡海岩. 应用非线性动力学 [M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.
- [6] 伍均科. 集中量与分布量的统一处理 [J]. 力学与实践, 1987, 9(4): 14~18.
Wu Junke. A Unified Treatment of Concentrated and Distributed Quantities [J]. *Mechanics and Practice*, 1987, 9(4): 14~18.
- [7] 王燮山. 奇异函数及其在力学中的应用 [M]. 北京: 科学技术出版社, 1993.
- [8] 丁千, 陈予恕. 迟滞型材料阻尼转轴的分岔 [J]. 应用数学和力学, 2003, 24(6): 565~571.
Ding Qian, Chen Yuhu. Bifurcation of a Shaft with Hysteretic-Type Internal Friction Force of Material [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24(6): 565~571.
- [9] 钟一谔, 何衍宗, 王正. 转子动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- [10] 张文. 转子动力学理论基础 [M]. 北京: 科学技术出版社, 1990.